Über den Gebrauch des neuen Algorithmus' beim Lösen des Pell'schen Problems *

Leonhard Euler

§1 Welche ganzen Zahlen auch immer für die Zahlen l, m und n angenommen werden, es können dann auch unzählige ganze Zahlen für x gefunden werden, mit denen diese Formel

$$lxx + mx + n$$

zu einem Quadrat gemacht wird, wenn freilich die folgenden Bedingungen Geltung haben:

I. dass l eine positive nicht quadratische Zahl ist,
II. dass für x zumindest ein einziger Wert bekannt ist.

Denn wenn l eine entweder negative oder quadratische Zahl ist, ist es offenbar, dass nicht unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen dargeboten können, auch wenn eine bekannt geworden ist. Dann kann es in der Tat auch passieren,

*Originaltitel: "De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11* 1767, pp. 28-66", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 3, pp. 73 - 111 ", Eneström-Nummer E323, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

dass die Formel $lxx + mx + n$ der Natur der Quadrates widerspricht, wie es in diesem Fall $3xx + 2$ geschieht. Aber sofort wie man eine einzige Lösung hat, lassen sich immer unzählige finden.

§2 Daher, wenn wir festlegen

$$lxx + mx + n = yy$$

und ein einziger Fall bekannt ist, in welchem dieser Bedingung Genüge geleistet wird, so dass nach Setzen von $x = a$ hervorgeht

$$laa + ma + n = bb$$

und nach Nehmen von $x = a$ $y = b$ erhalten wird, verhält sich die Regel, mit deren Hilfe mehrere, sogar unendlich viele gefundenen werden können, so:

Zuerst werden aus der gegebenen Zahl l zwei Zahlen p und q von dieser Art ausfindig gemacht, dass gilt

$$pp = lqq + 1 \quad \text{oder} \quad p = \sqrt{lqq + 1},$$

nach Finden von welchen aus der ersten bekannten Lösung sofort diese neue gefunden wird

$$x = pa + qb \ + \frac{m}{2l}(p - 1),$$

woher wird

$$y = pb + lqa + \frac{1}{2}mq,$$

aus welcher darauf folgend auf die gleiche Weise andere deriviert werden. Wenn wir nämlich diese Werte anstelle von a und b einsetzen, entsprießt diese dritte Lösung

$$x = (2pp-1)a + 2pqb \ + mqq$$

und

$$y = (2pp-1)b + 2lpqa + mpq$$

welche gewiss ganzzahlig ist, wenn die Zahlen auch unter Umständen bis jetzt noch gebrochen waren.

§3 Weil also auf diese Weise ununterbrochen neue Lösungen gefunden werden können, ist es für die Kürze der Rechnung äußerst förderlich angemerkt zu haben, dass die aufeinander folgenden Werte, so die von x wie die von y, nach einer rekurrenten Reihe fortschreiten, deren einzelne durch die je zwei vorhergehende nach einem bestimmten und feststehenden Gesetz bestimmt werden. Wenn natürlich diese ununterbrochen fortschreitenden Werte diese waren

$$\begin{array}{lllllllll} \text{von} & x & a, & \dots & P, & Q, & R, & S, & \text{etc.,} \\ \text{von} & y & b, & \dots & \mathfrak{P}, & \mathfrak{Q}, & \mathfrak{R}, & \mathfrak{S}, & \text{etc.,} \end{array}$$

wird durch das Bildungsgesetz der rekurrenten Reihen sein

$$R 2pQ - P + \frac{m(p-1)}{l}, \quad \mathfrak{R} = 2p\mathfrak{Q} - \mathfrak{P},$$

$$S\, 2pR - Q + \frac{m(p-1)}{l}, \quad \mathfrak{S} = 2p\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}.$$

Und daher können diese Werte in allgemeinen Ausdrücken erfasst werden, die sich so verhalten

$$x = \frac{2la + m + 2b\sqrt{l}}{4l}(p + q\sqrt{l})^{\mu} + \frac{2la + m - 2b\sqrt{l}}{4l}(p - q\sqrt{l})^{\mu} - \frac{m}{2l},$$
$$y = \frac{2la + m + 2b\sqrt{l}}{4\sqrt{l}}(p + q\sqrt{l})^{\mu} - \frac{2la + m - 2b\sqrt{l}}{4\sqrt{l}}(p - q\sqrt{l})^{\mu},$$

woher, welche Zahlen auch immer dem ganzzahligen Exponenten μ zugeteilt werden, immer rationale Werte für x und y resultieren.

§4 Diese Untersuchung kann aber um Vieles weiter ausgedehnt werden, so dass nach Vorlegen einer Gleichung zwischen zwei Zahlen x und y von dieser Art

$$Axx + 2Bxy + Cyy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

alle Lösungen in ganzen und rationalen Zahlen zu finden sind. Hier ist es gleichermaßen notwendig, dass eine Lösung bekannt ist, die $x = a$ und $x = b$ sei, so dass gilt

$$Aaa + 2Bab + Cbb + 2Da + 2Eb + F = 0.$$

Dann werden aber zwei Zahlen p und q gesucht, dass gilt

$$pp = (BB - AC)qq + 1,$$

was freilich nicht geschehen kann, wenn nicht $BB > AC$ ist. Und die neue

Lösung wird so beschaffen sein

$$x = a(p + Bq) + bCq + Eq + \frac{BE - CD}{BB - AC}(p - 1),$$
$$y = y(p - Bq) + aAq + Dq + \frac{BD - AE}{BB - AC}(p - 1),$$

woher sich durch dasselbe Gesetz immer mehr finden lassen.

§5 Es scheint daher ratsam, hiervon eine Erwähnung zu machen, damit eingesehen wird, dass für alle Auflösungen dieses Geschlechts ganz und gar verlangt wird, dass nach Vorlegen irgendeiner ganzen positiven nicht quadratischen Zahl l zwei gleichermaßen ganze Zahlen p und q gefunden werden müssen, dass gilt

$$pp = lqq + 1 \quad \text{oder} \quad p = \sqrt{lqq + 1}.$$

Und dies ist jenes einst höchst berühmte nach dem Finder der überaus geistreichen Lösung so genannte PELL'sche Problem, in welchem für jegliche Zahl l von dieser Art eine Quadratzahl qq verlangt wird, welche mit l multipliziert nach Hinzufügen der Einheit ein Quadrat wird. In gebrochenen Zahlen hätte freilich diese Frage keine Schwierigkeit an sich, weil nach Nehmen von $q = \frac{2rs}{lss-rr}$ $p = \frac{lss+rr}{lss-rr}$ wird; aber weil ganze Zahlen verlangt werden, wird die Aufgabe wiederum darauf zurückgeführt, dass der Nenner $lss - rr$ in die Einheit übergeht.

§6 Auch wenn aber die PELL'sche Lösung dieses Problems überaus elegnat ist, wird sie dennoch oftmals in so aufwändige Rechnungen verwickelt, welche nicht weniger an Unangehnehmlichkeit und Arbeit zu verursachen pflegen. Nachdem ich also bemerkt hatte, dass jener neue Algorithmus, dessen natürliche Beschaffenheit ich neulich dargestellt habe, um diese Rechnungen, die hier nötig sind, zusammenzuziehen, außerordentliche Hilfsmittel an die Hand gibt, wird sich gewiss kaum ein schöneres Beispiel darbieten lassen, an welchem der Gebrauch dieses Algorithmus' illustriert und mitgeteilt wird. Dort taucht das besonders bemerkenswerte Phänomen auf, dass der ganze daher erlangte Vorteil häuptsächlich im Gebrauch geeigneter Zeichen enthalten ist.

§7 Die Operationen, die Pell gebraucht hat, sind freilich anderswoher zur Genüge bekannt und ich habe sie auch bei einer anderen Gelegenheit beschrieben; daher ist es umso weniger notwendig, dass ich mich damit aufhalte, sie erneut zu erklären, weil ich hier die ganze Analysis auf eine weit andere Methode stützen werde. Ihre Grundlage schöpfe ich natürlich aus dieser Quelle, dass, weil $pp = lqq + 1$ ist, näherungsweise $\frac{p}{q} = \sqrt{l}$ wird, woher es offenbar ist, dass $\frac{p}{q}$ ein Bruch von solcher Art ist, der den irrationalen Wert $\sqrt{l}$ so nahe ausdrückt oder ihn so wenig übersteigt, dass es nur unter Verwendung größerer Zahlen genauer geschehen kann. Dieses einst von Wallis glücklich gelöste Problem habe ich freilich auch schon vor langer Zeit durch Kettenbrüche um Vieles angenehmer erledigt.

§8 Damit ich also diesen Gegenstand deutlicher und geordnet behandele, werde ich zuerst lehren, die Quadratwurzel aus einer jeden Zahl in einen Kettenbruch zu entwickeln, und das mit einer möglichst unaufwändigen Methode. Danach möchte ich zeigen, auf welche Weise daher die Brüche $\frac{p}{q}$, die den irrationalen Wert $\sqrt{l}$ näherungsweise ausdrücken, gebildet werden müssen, nachdem der oben erklärte neue Algorithmus zur Hilfe genommen worden ist. Dann wird aber leicht klar werden, auf welche Weise daher die Zahlen p und q definiert werden müssen, dass $pp = lqq + 1$ wird. Schließlich werde ich eine Tabelle hinzufügen, in welcher für alle die hundert nicht überragenden Zahlen l die zwei Zahlen p und q dargeboten werden.

Über die Entwicklung von Quadratwurzeln durch Kettenbrüche

§9 Die für dieses Ziel durchzuführenden Operationen werden am leichtesten an einem Beispiel erläutert werden. Es sei also die Quadratwurzel aus der

Zahl 13 vorgelegt, und weil die nächst kleinere rationale Wurzel 3 ist, setzte ich

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{a}.$$

Daher wird erschlossen

$$a = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4},$$

dessen nächst kleinerer Wert in ganzen Zahlen 1 ist, was daher klar zu tage tritt, wenn 3 anstelle von $\sqrt{13}$ geschrieben wird. Ich setze deshalb

$$a = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{b}$$

und daher

$$b = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{4(\sqrt{13} + 1)}{12} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{c},$$

also

$$c = \frac{3}{\sqrt{13} - 2} = \frac{3(\sqrt{13} + 2)}{9} = \frac{\sqrt{13} + 2}{3} = 1 + \frac{1}{d},$$

also

$$d = \frac{3}{\sqrt{13} - 1} = \frac{3(\sqrt{13} + 1)}{12} = \frac{\sqrt{13} + 1}{4} = 1 + \frac{1}{e},$$

also

$$e = \frac{4}{\sqrt{13} - 4} = \frac{4(\sqrt{13} + 3)}{4} = \sqrt{13} + 3 = 6 + \frac{1}{f},$$

also

$$f = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} \qquad = 1 + \frac{1}{g};$$

und hier lässt sich die Operation abbrechen, weil der Wert f bereits wieder als a gleich hervorgegangen ist und daher die folgenden in derselben Reihenfolge wiederholt werden. Und so haben wir gefunden, dass gilt

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

§10 Damit die Beschaffenheit dieser Operationen besser erkannt wird, möchte ich ein anderes eine längere Rechnung erforderndes Beispiel anführen. Es sei natürlich $\sqrt{61}$ vorgelegt; weil deren nächst kleinerer Wert 7 ist, setze ich

$$\sqrt{61} = 7 + \frac{1}{a}$$

und die Operationen werden auf die folgende Weise durchzuführen sein:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{I.} & a = \dfrac{1}{\sqrt{61}-7} & = & \dfrac{\sqrt{61}+7}{12} & = 1+\dfrac{1}{b}, & \\[2ex]
\text{II.} & b = \dfrac{12}{\sqrt{61}-5} & = \dfrac{12(\sqrt{61}+5)}{36} & = \dfrac{\sqrt{61}+5}{3} & = 4+\dfrac{1}{c}, & \\[2ex]
\text{III.} & c = \dfrac{3}{\sqrt{61}-7} & = \dfrac{3(\sqrt{61}+7)}{12} & = \dfrac{\sqrt{61}+7}{4} & = 3+\dfrac{1}{d}, & \\[2ex]
\text{IV.} & d = \dfrac{4}{\sqrt{61}-5} & = \dfrac{4(\sqrt{61}+5)}{36} & = \dfrac{\sqrt{61}+5}{9} & = 1+\dfrac{1}{e}, & \\[2ex]
\text{V.} & e = \dfrac{9}{\sqrt{61}-4} & = \dfrac{9(\sqrt{61}+4)}{45} & = \dfrac{\sqrt{61}+4}{5} & = 2+\dfrac{1}{f}, & \\[2ex]
\text{VI.} & f = \dfrac{5}{\sqrt{61}-6} & = \dfrac{5(\sqrt{61}+6)}{25} & = \dfrac{\sqrt{61}+6}{5} & = 2+\dfrac{1}{g}, & \\[2ex]
\text{VII.} & g = \dfrac{5}{\sqrt{61}-4} & = \dfrac{5(\sqrt{61}+4)}{45} & = \dfrac{\sqrt{61}+4}{9} & = 1+\dfrac{1}{h}, & \\[2ex]
\text{VIII.} & h = \dfrac{9}{\sqrt{61}-5} & = \dfrac{9(\sqrt{61}+5)}{36} & = \dfrac{\sqrt{61}+5}{4} & = 3+\dfrac{1}{i}, & \\[2ex]
\text{IX.} & i = \dfrac{4}{\sqrt{61}-7} & = \dfrac{4(\sqrt{61}+7)}{12} & = \dfrac{\sqrt{61}+7}{3} & = 4+\dfrac{1}{k}, & \\[2ex]
\text{X.} & k = \dfrac{3}{\sqrt{61}-5} & = \dfrac{3(\sqrt{61}+5)}{36} & = \dfrac{\sqrt{61}+5}{12} & = 1+\dfrac{1}{l}, & \\[2ex]
\text{XI.} & l = \dfrac{12}{\sqrt{61}-7} & = \dfrac{12(\sqrt{61}+7)}{12} & = \sqrt{61}+7 & = 14+\dfrac{1}{m}, & \\[2ex]
\text{XII.} & m = \dfrac{1}{\sqrt{61}-7}, & & & &
\end{array}
$$

also ist $m = a$ und daher weiter $n = b$, $o = c$ etc. Daher werden die Indizes für den Kettenbruch diese sein

7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 14, 1, 4, 3, 1, 2 etc.

und es ist nicht notwendig, den Kettenbruch selbst hier darzubieten.

§11 Es wird förderlich sein noch ein anderes Beispiel hinzugefügt zu haben, wo die Anzahl der Indizes, bevor dieselben Indizes wiederkehren, ungerade wird. Das Beispiel sei dieses

$$\sqrt{67} = 8 + \frac{1}{a}$$

und es werden die folgenden Operationen durchgeführt werden müssen:

$$\begin{array}{lllllll}
\text{I.} & a = \dfrac{1}{\sqrt{67}-8} & = & \dfrac{\sqrt{67}+8}{3} & & = 5 + \dfrac{1}{b}, \\
\text{II.} & b = \dfrac{3}{\sqrt{67}-7} & = \dfrac{3(\sqrt{67}+7)}{18} & = & \dfrac{\sqrt{67}+7}{6} & = 2 + \dfrac{1}{c}, \\
\text{III.} & c = \dfrac{3}{\sqrt{67}-5} & = \dfrac{6(\sqrt{67}+5)}{42} & = & \dfrac{\sqrt{67}+5}{7} & = 1 + \dfrac{1}{d}, \\
\text{IV.} & d = \dfrac{7}{\sqrt{67}-2} & = \dfrac{7(\sqrt{67}+2)}{63} & = & \dfrac{\sqrt{67}+2}{9} & = 1 + \dfrac{1}{e}, \\
\text{V.} & e = \dfrac{9}{\sqrt{67}-7} & = \dfrac{9(\sqrt{67}+7)}{18} & = & \dfrac{\sqrt{67}+7}{2} & = 7 + \dfrac{1}{f}, \\
\text{VI.} & f = \dfrac{2}{\sqrt{67}-7} & = \dfrac{2(\sqrt{67}+7)}{18} & = & \dfrac{\sqrt{67}+7}{9} & = 1 + \dfrac{1}{g}, \\
\text{VII.} & g = \dfrac{9}{\sqrt{67}-2} & = \dfrac{9(\sqrt{67}+2)}{63} & = & \dfrac{\sqrt{67}+2}{7} & = 1 + \dfrac{1}{h}, \\
\text{VIII.} & h = \dfrac{7}{\sqrt{67}-5} & = \dfrac{7(\sqrt{67}+5)}{42} & = & \dfrac{\sqrt{67}+5}{6} & = 2 + \dfrac{1}{i},
\end{array}$$

$$\text{IX.}\quad i = \frac{6}{\sqrt{67}-7} = \frac{6(\sqrt{67}+7)}{18} = \frac{\sqrt{67}+7}{3} = 5 \; + \frac{1}{k},$$

$$\text{X.}\quad k = \frac{3}{\sqrt{67}-8} = \frac{3(\sqrt{67}+8)}{3} = \sqrt{67}+8 = 16 + \frac{1}{l},$$

$$\text{XI.}\quad l = \frac{1}{\sqrt{67}-8},$$

also ist $l = a$ und daher kehren die Indizes b, c, d etc. der Reihe nach zurück; daher sind die des gesuchten Kettenbruches

8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 2, 5, 16, 5, 2, 1, 1, 7, 7, 1, 1, 2, 5, 16 etc.

§12 Nachdem diese Beispiele gründlich und sittsam betrachtet worden sind, werden wir schon im Allgemeinen die Operationen beschreiben können, mit denen für die Quadratwurzel einer jeden Zahl der selbiger gleiche Kettenbruch oder die ihn festlegenden Indizes gefunden werden. Es sei natürlich die vorgelegte Zahl $= z$ und die nächst kleinere ganze Wurzel sei $= v$, aber der Kettenbruch werde so ausgedrückt

$$\sqrt{z} = v + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}}$$

dessen Indizes a, b, c, d etc. nach dem ersten per se bekannten v mit den folgenden Operationen aufgefunden werden:

Man nehme   dann aber   und es wird sein

$$
\begin{array}{llll}
\text{I.} & A = v, & \alpha = z - AA \;= z - vv & a < \dfrac{v+A}{\alpha}, \\[2ex]
\text{II.} & B = \alpha a - A, & \beta = \dfrac{z - BB}{\alpha} = 1 + a(A - B) & b < \dfrac{v+B}{\beta}, \\[2ex]
\text{III.} & C = \beta b - B, & \gamma = \dfrac{z - CC}{\beta} = \alpha + b(B - C) & c < \dfrac{v+C}{\gamma}, \\[2ex]
\text{IV.} & D = \gamma c - C, & \delta = \dfrac{z - DD}{\gamma} = \beta + c(C - D) & d < \dfrac{v+D}{\delta}, \\[2ex]
\text{V.} & E = \delta d - D, & \varepsilon = \dfrac{z - EE}{\delta} = \gamma + d(D - E) & e < \dfrac{v+E}{\varepsilon}
\end{array}
$$

etc.

wo in der letzten Spalte das Zeichen $<$ anzeigt, dass für die Buchstaben a, b, c, d etc. die nächst kleineren ganzen Zahlen als die hinzugeschriebenen Brüche genommen werden müssen, außer wenn die Brüche selbst in ganze Zahlen übergehen, in welchem Fall diese selbst die Indizes sein werden.

§13 Für die zu findenden Indizes a, b, c, d etc. müssen also zwei andere Reihen von Zahlen aufgefunden werden, von denen ich die erste mit den Großbuchstaben

$$A, \quad B, \quad C, \quad D \quad \text{etc.},$$

die zweite hingegen mit den griechischen

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta \quad \text{etc.}$$

bezeichnet habe. Über diese Zahlen bemerke ich, dass sie die Zahl v niemals übersteigen können. Von diesen ist freilich die erste $A = v$, aber weil $a < \frac{v+A}{\alpha}$ ist, wird $\alpha a - A < v$ und daher $B < v$ oder höchstens $B = v$ sein, in welchem Fall $\beta = 1$ und $b = 2v$ wird. Darauf ist wegen $b < \frac{v+B}{\beta}$ auch $\beta b - B = C < v$

und auf die gleiche Weise $D < v$, $E < v$ etc., so dass keine dieser Zahlen größer als v hervorgehen kann. Des Weiteren tritt es klar zu tage, dass außer den Fällen, in denen ein bestimmter der griechischen Buchstaben die Einheit wird, alle Indizes a, b, c etc. nicht größer als v sein können, weil ja in den Brüchen $\frac{v+B}{\beta}$, $\frac{v+C}{\gamma}$ etc. die Zähler $2v$ nicht überschreiten können, die Nenner hingegen höchstens $= 2$ sind. Schließlich, nachdem zu einem Index $= 2v$ gelangt worden ist, gehen die folgenden wiederum als a, b, c, d etc. hervor.

§14 Wir wollen auch diese Operationen an einigen Beispielen illustrieren
I. Es sei $z = 31$; es wird $v = 5$ sein.

$$\begin{array}{lll}
A = 5, & \alpha = 6, & a < \dfrac{10}{6} = 1, \\[2ex]
B = 6 - 5 = 1, & \beta = 1 + 1 \cdot 4 = 5, & b < \dfrac{6}{5} = 1, \\[2ex]
C = 5 - 1 = 4, & \gamma = 6 + 1 \cdot 3 = 3, & c < \dfrac{9}{3} = 3, \\[2ex]
D = 9 - 4 = 5, & \delta = 5 + 3 \cdot 1 = 2, & d < \dfrac{10}{2} = 5, \\[2ex]
E = 10 - 5 = 5, & \varepsilon = 3 + 5 \cdot 0 = 3, & e < \dfrac{10}{2} = 3, \\[2ex]
F = 9 - 5 = 4, & \zeta = 2 + 3 \cdot 1 = 5, & f < \dfrac{9}{5} = 1, \\[2ex]
G = 5 - 4 = 1, & \eta = 3 + 1 \cdot 3 = 6, & g < \dfrac{6}{6} = 1, \\[2ex]
H = 6 - 1 = 5, & \theta = 5 - 1 \cdot 4 = 1, & h < \dfrac{10}{1} = 10.
\end{array}$$

II. Es sei $z = 46$; es wird $v = 6$ sein.

$$
\begin{array}{llll}
A &= 6, & \alpha = 10, & a < \dfrac{12}{10} = 1, \\
B &= 10 - 6 = 4, & \beta = 1 \quad + 1 \cdot 2 = 3, & b < \dfrac{10}{3} = 3, \\
C &= 9 \quad - 4 = 5, & \gamma = 10 \ - 3 \cdot 1 = 7, & c < \dfrac{11}{7} = 1, \\
D &= 7 \quad - 5 = 2, & \delta = 3 \quad + 1 \cdot 3 = 6, & d < \dfrac{8}{6} = 1, \\
E &= 6 \quad - 2 = 4, & \varepsilon = 7 \quad - 1 \cdot 2 = 5, & e < \dfrac{10}{5} = 2, \\
F &= 10 - 4 = 6, & \zeta = 6 \quad - 2 \cdot 2 = 2, & f < \dfrac{12}{2} = 6, \\
G &= 12 - 6 = 6, & \eta = 5 \quad + 6 \cdot 0 = 5, & g < \dfrac{12}{5} = 2, \\
H &= 10 - 6 = 4, & \theta = 2 \quad + 2 \cdot 2 = 6, & h < \dfrac{10}{6} = 1, \\
I &= 6 \quad - 4 = 2, & \iota = 5 \quad + 1 \cdot 2 = 7, & i < \dfrac{8}{7} = 1, \\
K &= 7 \quad - 2 = 5, & \varkappa = 6 \quad + 1 \cdot 3 = 3, & k < \dfrac{11}{3} = 3, \\
L &= 9 \quad - 5 = 4, & \lambda = 7 \quad + 3 \cdot 1 = 10, & l < \dfrac{10}{10} = 12, \\
M &= 10 - 4 = 6, & \mu = 3 \quad - 1 \cdot 2 = 1, & m < \dfrac{12}{1} = 12.
\end{array}
$$

III. Es sei $z = 54$; es wird $v = 7$ sein.

$$
\begin{aligned}
A &= 7, & \alpha &= 5, & a &< \frac{14}{5} = 2,\\
B &= 10-7=3, & \beta &= 1+2\cdot 4 = 9, & b &< \frac{10}{9} = 1,\\
C &= 9-3=6, & \gamma &= 5-1\cdot 3 = 2, & c &< \frac{13}{2} = 6,\\
D &= 12-6=6, & \delta &= 9+6\cdot 0 = 9, & d &< \frac{13}{9} = 1,\\
E &= 9-6=3, & \varepsilon &= 2+1\cdot 3 = 5, & e &< \frac{10}{5} = 2,\\
F &= 10-3=7, & \zeta &= 9-2\cdot 4 = 1, & f &< \frac{14}{1} = 14.
\end{aligned}
$$

§15 Ich möchte also hier die Tabelle beifügen, die die Indizes, aus welchen die selbigen gleichen Kettenbrüche gebildet werden können, für die Quadratwurzeln der einzelnen Zahlen enthält. Zugleich werden aber die darunter geschriebenen Werte der den einzelnen zukommenden griechischen Buchstaben aufgefunden.

surdische Zahlen	Indizes							
$\sqrt{2}$	1,	2,	2,	2	etc.			
	1	1	1	1				
$\sqrt{3}$	1,	1,	2,	1,	2,	1,	2	etc.
	1	2	1	2	1	2	1	
$\sqrt{5}$	2,	4,	4,	4,	etc.			
	1	1	1	1				

$\sqrt{6}$	2,	2,	4,	2,	4,	2,	4	etc.						
	1	2	1	2	1	2	1							
$\sqrt{7}$	2,	1,	1,	1,	4,	1,	1,	1,	4	etc.				
	1	3	2	3	1	3	2	3	1					
$\sqrt{8}$	2,	1,	4,	1,	4,	1,	4	etc.						
	1	4	1	4	1	4	1							
$\sqrt{10}$	3,	6	6,	6	etc.									
	1	1	1	1										
$\sqrt{11}$	3,	3,	6,	3,	6,	3,	6	etc.						
	1	2	1	2	1	2	1							
$\sqrt{12}$	3,	2,	6,	2,	6,	2,	6	etc.						
	1	3	1	3	1	3	1							
$\sqrt{13}$	3,	1,	1,	1,	1,	6,	1,	1,	1,	1,	6	etc.		
	1	4	3	3	4	1	4	3	3	4	1			
$\sqrt{14}$	3,	1,	2,	1,	6,	1,	2,	1,	6	etc.				
	1	5	2	5	1	5	2	5	1					
$\sqrt{15}$	3,	1,	6,	1,	6,	1,	6	etc.						
	1	6	1	6	1	6	1							
$\sqrt{17}$	4,	8,	8,	8,	8	etc.								
	1	1	1	1	1									
$\sqrt{18}$	4,	4,	8,	4,	8,	4,	8,	4,	8	etc.				
	1	2	1	2	1	2	1	2	1					
$\sqrt{19}$	4,	2,	1,	3,	1,	2,	8,	2,	1,	3,	1,	2,	8	etc.
	1	3	5	2	5	3	1	3	5	2	5	3	1	

$\sqrt{20}$	4,	2,	8,	2,	8,	2,	8,	2,	8	etc.				
	1	4	1	4	1	4	1	4	1					
$\sqrt{21}$	4,	1,	1,	2,	1,	1,	8,	1,	1,	2,	1,	1,	8	etc.
	1	5	4	3	4	5	1	5	4	3	4	5	1	
$\sqrt{22}$	4,	1,	2,	4,	2,	1,	8,	1,	2,	4,	2,	1,	8	etc.
	1	6	3	2	3	6	1	6	3	2	3	6	1	
$\sqrt{23}$	4,	1,	3,	1,	8,	1,	3,	1,	8	etc.				
	1	7	2	7	1	7	2	7	1					
$\sqrt{24}$	4,	1,	8,	1,	8,	1,	8	etc.						
	1	8	1	8	1	8	1							

$\sqrt{26}$	5,	10,	10,	10	etc.							
	1	1	1	1								
$\sqrt{27}$	5,	5,	10,	5,	10,	5,	10	etc.				
	1	2	1	2	1	2	1					
$\sqrt{28}$	5,	3,	2,	3,	10,	3,	2,	3,	10	etc.		
	1	3	4	3	1	3	4	3	1			
$\sqrt{29}$	5,	2,	1,	1,	2,	10,	2,	1,	1,	2,	10	etc.
	1	4	5	5	4	1	4	5	5	4	1	
$\sqrt{30}$	5,	2,	10,	2,	10,	2,	10,	2,	10	etc.		
	1	5	1	5	1	5	1	5	1			
$\sqrt{31}$	5,	1,	1,	3,	5,	3,	1,	1,	10	etc.		
	1	6	5	3	2	3	5	6	1			

$\sqrt{32}$	5,	1,	1,	1,	10,	1,	1,	1,	10	etc.		
	1	7	4	7	1	7	4	7	1			
$\sqrt{33}$	5,	1,	2,	1,	10,	1,	4,	1,	10	etc.		
	1	8	3	8	1	8	3	8	1			
$\sqrt{34}$	5,	1,	4,	1,	10,	1,	4,	1,	10	etc.		
	1	9	2	9	1	9	2	9	1			
$\sqrt{35}$	5,	1,	10,	1,	10,	1,	10	etc.				
	1	10	1	10	1	10	1					

$\sqrt{37}$	6,	12,	12,	12	etc.							
	1	1	1	1								
$\sqrt{38}$	6,	6,	12,	6,	12,	6,	12	etc.				
	1	2	1	2	1	2	1					
$\sqrt{39}$	6,	4,	12,	4,	12,	4,	12	etc.				
	1	3	1	3	1	3	1					
$\sqrt{40}$	6,	3,	12,	3,	12,	3,	12	etc.				
	1	4	1	4	1	4	1					
$\sqrt{41}$	6,	2,	2,	12,	2,	2,	12	etc.				
	1	5	5	1	5	5	1					
$\sqrt{42}$	6,	2,	12,	2,	12,	2,	12	etc.				
	1	6	1	6	1	6	1					
$\sqrt{43}$	6,	1,	1,	3,	1,	5,	1,	3,	1,	1,	12	etc.
	1	7	6	3	9	2	9	3	6	7	1	
$\sqrt{44}$	6,	1,	1,	1,	2,	1,	1,	1,	12	etc.		
	1	8	5	7	4	7	5	8	1			

$\sqrt{45}$	6,	1,	2,	2,	2,	1,	12,	1,	2,	2,	2,	1,	12	etc.
	1	9	4	5	4	9	1	9	4	5	4	9	1	
$\sqrt{46}$	6,	1,	3,	1,	1,	2,	6,	2,	1,	1,	3,	1,	12	etc.
	1	10	3	7	6	5	2	5	6	7	3	10	1	
$\sqrt{47}$	6,	1,	5,	1,	12,	1,	5,	1,	12	etc.				
	1	11	2	11	1	11	2	11	1					
$\sqrt{48}$	6,	1,	12,	1,	12,	1,	12	etc.						
	1	12	1	12	1	12	1							

$\sqrt{50}$	7,	14,	14,	14	etc.									
	1	1	1	1										
$\sqrt{51}$	7,	7,	14,	7,	14,	7,	14	etc.						
	1	2	1	2	1	2	1							
$\sqrt{52}$	7,	4,	1,	2,	1,	4,	14,	4,	1,	2,	1,	4,	14	etc.
	1	3	9	4	9	3	1	3	9	4	9	3	1	
$\sqrt{53}$	7,	3	1,	1,	3,	14,	3,	1,	1,	3,	14	etc.		
	1	4	7	7	4	1	4	7	7	4	1			
$\sqrt{54}$	7,	2,	1,	6,	1,	2,	14,	2,	1,	6,	1,	2,	14	etc.
	1	5	9	2	9	5	1	5	9	2	9	5	1	
$\sqrt{55}$	7,	2,	2,	2,	14,	2,	2,	2,	14,	2,	2,	2,	14	etc.
	1	6	5	6	1	6	5	6	1	6	5	6	1	
$\sqrt{56}$	7,	2,	14,	2,	14,	2,	14	etc.						
	1	7	1	7	1	7	1							
$\sqrt{57}$	7,	1,	1,	4,	1,	1,	14	etc.						
	1	8	7	3	7	8	1							

$\sqrt{58}$	7,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	14	etc.				
	1	9	6	7	7	6	9	1					
$\sqrt{59}$	7,	1,	2,	7,	2,	1,	14	etc.					
	1	10	5	2	5	10	1						
$\sqrt{60}$	7,	1,	2,	1,	14	etc.							
	1	11	4	11	1								
$\sqrt{61}$	7,	1,	4,	3,	1,	2,	2,	1,	3,	4,	1,	14	etc.
	1	12	3	4	9	5	5	9	4	3	12	1	
$\sqrt{62}$	7,	1,	6,	1,	14	etc.							
	1	13	2	13	1								
$\sqrt{63}$	7,	1,	14	1,	14	etc.							
	1	14	1	14	1								

$\sqrt{65}$	8,	16,	16	etc.								
	1	1	1									
$\sqrt{66}$	8,	8,	16,	8,	16	etc.						
	1	2	1	2	1							
$\sqrt{67}$	8,	5,	2,	1,	1,	7,	1,	1,	2,	5,	16	etc.
	1	3	6	7	9	2	9	7	6	3	1	
$\sqrt{68}$	8,	4,	16,	4,	16	etc.						
	1	4	1	4	1							
$\sqrt{69}$	8,	3,	3,	1,	4,	1,	3,	3,	16	etc.		
	1	5	4	11	3	11	4	5	1			
$\sqrt{70}$	8,	2,	1,	2,	1,	2,	16	etc.				
	1	6	9	5	9	6	1					

$\sqrt{71}$	8,	2,	2,	1,	7,	1,	2,	2,	16	etc.				
	1	7	5	11	2	11	5	7	1					
$\sqrt{72}$	8,	2,	16,	2,	16	etc.								
	1	8	1	8	1									
$\sqrt{73}$	8,	1,	1,	5,	5,	1,	1,	16	etc.					
	1	9	8	3	3	8	9	1						
$\sqrt{74}$	8,	1,	1,	1,	1,	16	etc.							
	1	10	7	7	10	1								
$\sqrt{75}$	8,	1,	1,	1,	16	etc.								
	1	11	6	11	1									
$\sqrt{76}$	8,	1,	2,	1,	1,	5,	4,	5,	1,	1,	2,	1,	16	etc.
	1	12	5	8	9	3	4	3	9	8	5	12	1	
$\sqrt{77}$	8,	1,	3,	2,	3,	1,	16	etc.						
	1	13	4	7	4	13	1							
$\sqrt{78}$	8,	1,	4,	1,	16	etc.								
	1	14	3	14	1									
$\sqrt{79}$	8,	1,	7,	1,	16	etc.								
	1	15	2	15	1									
$\sqrt{80}$	8,	1,	16,	1,	16	etc.								
	1	16	1	16	1									

$\sqrt{82}$	9,	18,	18,	18	etc.	
	1	1	1	1		
$\sqrt{83}$	9,	9,	18,	9,	18	etc.
	1	2	1	2	1	

$\sqrt{84}$ 9, 6, 18, 6, 18 etc.
1 3 1 3 1

$\sqrt{85}$ 9, 4, 1, 1, 4, 18 etc.
1 4 9 9 4 1

$\sqrt{86}$ 9, 3, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 3, 18 etc.
1 5 10 7 11 2 11 7 10 5 1

$\sqrt{87}$ 9, 3, 18, 3, 18 etc.
1 6 1 6 1

$\sqrt{88}$ 9, 2, 1, 1, 1, 2, 18 etc.
1 7 9 8 9 7 1

$\sqrt{89}$ 9, 2, 3, 3, 2, 18 etc.
1 8 5 5 8 1

$\sqrt{90}$ 9, 2, 18, 2, 18 etc.
1 9 1 9 1

$\sqrt{91}$ 9, 1, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 18 etc.
1 10 9 3 14 3 9 10 1

$\sqrt{92}$ 9, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 18 etc.
1 11 8 7 4 7 8 11 1

$\sqrt{93}$ 9, 1, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 1, 18 etc.
1 12 7 11 4 3 4 11 7 12 1

$\sqrt{94}$ 9, 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18 etc.
1 13 6 5 9 10 3 15 2 15 3 10 9 5 6 13 1

$\sqrt{95}$ 9, 1, 2, 1, 18 etc.
1 14 4 15 1

$\sqrt{96}$ 9, 1, 3, 1, 18 etc.
1 15 4 15 1

$\sqrt{97}$	9, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18 etc. 1 16 3 11 8 9 9 8 11 3 16 1
$\sqrt{98}$	9, 1, 8, 1, 18 etc. 1 17 2 17 1
$\sqrt{99}$	9, 1, 18, 1, 18 etc. 1 18 1 18 1

$\sqrt{101}$	10, 20, 20 etc. 1 1 1
$\sqrt{102}$	10, 10, 20, 10, 20 etc. 1 2 1 2 1
$\sqrt{103}$	10, 6, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 1, 2, 1, 6, 20 etc. 1 3 13 6 9 11 2 11 9 6 13 3 1
$\sqrt{104}$	10, 5, 20, 5, 20 etc. 1 4 1 4 1
$\sqrt{105}$	10, 4, 20, 4, 20 etc. 1 5 1 5 1
$\sqrt{106}$	10, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 20 etc. 1 6 7 10 9 9 10 7 6 1
$\sqrt{107}$	10, 2, 1, 9, 1, 2, 20 etc. 1 7 13 2 13 7 1
$\sqrt{108}$	10, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 20 etc. 1 8 9 11 4 11 9 8 1
$\sqrt{109}$	10, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20 etc. 1 9 5 12 7 4 15 3 3 15 4 7 12 5 9 1

$\sqrt{110}$	10,	2,	20,	2,	20	etc.						
	1	10	1	10	1							
$\sqrt{111}$	10,	1,	1,	6,	1,	1,	20	etc.				
	1	11	10	3	10	11	1					
$\sqrt{112}$	10,	1,	1,	2,	1,	1,	20	etc.				
	1	12	9	7	9	12	1					
$\sqrt{113}$	10,	1,	1,	1,	2,	2,	1,	1,	1,	20	etc.	
	1	13	8	11	7	7	11	8	13	1		
$\sqrt{114}$	10,	1,	2,	10,	2,	1,	20	etc.				
	1	14	7	2	7	14	1					
$\sqrt{115}$	10,	1,	2,	1,	1,	1,	1,	1,	2,	1,	20	etc.
	1	15	6	11	9	10	9	11	6	15	1	
$\sqrt{116}$	10,	1,	3,	2,	1,	4,	1,	2,	1,	3,	20	etc.
	1	16	5	7	13	4	13	7	5	16	1	
$\sqrt{117}$	10,	1,	4,	2,	4,	1,	20	etc.				
	1	17	4	9	4	17	1					
$\sqrt{118}$	10,	1,	6,	3,	2,	10,	2,	3,	6,	1,	20	etc.
	1	18	3	6	9	2	9	6	3	18	1	
$\sqrt{119}$	10,	1,	9,	1,	20	etc.						
	1	19	2	19	1							
$\sqrt{120}$	10,	1,	20,	1,	20	etc.						
	1	20	1	20	1							

§16 In all diesen Reihen von Indizes werden mal kürzere mal längere Perioden entdeckt, die von den Indizes, die doppelt so groß sind wie der erste, eingeschlossen werden, und diese Perioden fallen umso deutlicher ins Auge, wenn die ersten Indizes einer jeden Reihe verdoppelt werden. Des Weiteren wird in jeder beliebigen Periode dieselbe Reihenfolge der Indizes, entweder vorwärts oder rückwärts, beobachtet; daher sind in jeder beliebigen Periode entweder ein mittlerer Index oder zwei mittlere Indizes gegeben, je nachdem ob die Anzahl der Terme gerade oder ungerade war. In der Tat werden auch bei den griechischen Buchstaben ähnliche Perioden beobachtet, wo besonders zu bemerken ist, dass für alle $2v$ Indizes ein griechischer Buchstabe in die Einheit übergeht. Diese vorzügliche Eigenschaft, die in den Operationen selbst leichter erkannt wird als sie auf dem Umweg über Worte bewiesen wird, sittsam angemerkt zu haben, wird im Folgenden sehr förderlich sein.

§17 Aus diesen Beispielen ist es aber möglich, bestimmte allgemeine Formen zu finden, die sich so verhalten:

I.	Ist	$z = nn + 1$,	werden die Indizes sein	n,	$2n$,	$2n$,	$2n$,	etc.,	
				1	1	1	1		
II.	Ist	$z = nn + 2$,	werden die Indizes sein	n,	n,	$2n$,	n,	$2n$,	etc.,
				1	2	1	2	1	
III.	Ist	$z = nn + n$,	werden die Indizes sein	n,	2,	$2n$,	2,	$2n$,	etc.,
				1	n	1	n	1	
IV.	Ist	$z = nn + 2n - 1$,	werden die Indizes sein	n,	1,	$n - 1$,	1,	$2n$,	etc.,
				1	$2n - 1$	2	$2n - 1$	1	
V.	Ist	$z = nn + 2n$,	werden die Indizes sein	n,	1,	$2n$,	1,	$2n$,	etc..
				1	$2n$	1	$2n$	1	

Und freilich wird der Wert der aus diesen Indizes gebildeten Kettenbrüche in Allgemeinen leicht bestimmt und derselbe, welchen wir hier angegeben haben, entdeckt. Dann tritt es in der Tat auch klar zu tage,

VI.	ist	$z = 4nn + 4$,	dass die Indizes sein werden	$2n$,	n,	$4n$,	n,	$4n$	etc.,
				1	4	1	4	1	
VII.	ist	$z = 9nn + 3$,	dass die Indizes sein werden	$3n$,	$2n$,	$6n$,	$2n$,	$6n$	etc.,
				1	3	1	3	1	
VIII.	ist	$z = 9nn + 6$,	dass die Indizes sein werden	$3n$,	n,	$6n$,	n,	$6n$	etc.
				1	6	1	6	1	

ÜBER DIE AUFLÖSUNG DER FORMEL $p = \sqrt{lqq + 1}$ IN GANZEN ZAHLEN

§18 Nachdem die Indizes gefunden worden sind, wird die Quadratwurzel einer jeden Zahl z auf diese Weise durch einen Kettenbruch ausgedrückt:

$$\sqrt{z} = v + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}}$$

und aus diesen Indizes v, a, b, c, d etc. können Brüche gebildet werden, welche so nahe an $\sqrt{z}$ herankommen, dass ihr Wert nur unter Verwendung größerer Zahlen genauer dargeboten werden kann. Diese Brüche werden aber so gebildet:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\text{Indizes} & v, & a, & b, & c, & \dots & m, & n, & \\
\dfrac{x}{y} & \dfrac{1}{0}, & \dfrac{v}{1}, & \dfrac{av+1}{a}, & \dfrac{(ab+1)v+b}{ab+1}, & \dots & \dfrac{M}{P}, & \dfrac{N}{Q}, & \dfrac{nN+M}{nQ+P},
\end{array}
$$

welche immer näher den irrationalen Wert $\sqrt{z}$ ausdrücken.

§19 Aber der neue Algorithmus gibt eine kurze Methode an die Hand, diese Brüche angenehm durch die Indizes darzustellen, welche sich so verhalten:

$$
\frac{1}{0}, \quad \frac{(v)}{1}, \quad \frac{(v,a)}{(a)}, \quad \frac{(v,a,b)}{(a,b)}, \quad \frac{(v,a,b,c)}{(a,b,c)}, \quad \frac{(v,a,b,c,d)}{(a,b,c,d)} \quad \text{etc.;}
$$

weil dort aus der Natur der Progression gilt

$$
\begin{array}{lll}
(v,a) = a(v)+1, & (v,a,b) = b(v,a)+(v), & (v,a,b,c) = c(v,a,b)+(v,a) \\
(a) \quad = a1+0, & (a,b) \quad = b(a)+1, & (a,b,c) \quad = c(a,b)+(a),
\end{array}
$$

wird auch aus der Natur dieser Formeln sein

$$
(v,a) = v(a)+1, \quad (v,a,b) = v(a,b)+b, \quad (v,a,b,c) = v(a,b,c)+(b,c);
$$

Des Weiteren habe ich die folgenden Transformationen bewiesen

$$
\begin{aligned}
(v,a,b,c,d,e) &= v(a,b,c,d,e) \quad +(b,c,d,e), \\
(v,a,b,c,d,e) &= (v,a)(b,c,d,e)+v(c,d,e),
\end{aligned}
$$

$$(v,a,b,c,d,e) = (v,a,b)(c,d,e) + (v,a)(d,e),$$
$$(v,a,b,c,d,e) = (v,a,b,c)(d,e) + (v,a,b)(e),$$

welche sittsam angemerkt zu haben im Folgenden äußerst förderlich sein wird.

§20 Wir wollen nun sehen, wie nahe diese Brüche an den Wert $\sqrt{z}$ herankommen, was für unser Unterfangen am deutlichsten daraus klar zu tage treten wird, wenn wir aus jedem Bruch $\frac{x}{y}$ den Wert $xx - zyy$ erschließen; umso kleiner natürlich jener Wert in Bezug auf die Zahlen x und y war, umso genauer wird der Bruch $\frac{x}{y}$ dem Wert $\sqrt{z}$ gleich werden. Und zuerst wird freilich, wenn $\frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ ist, $xx - zyy = 1$ sein. Des Weiteren wird nach Nehmen von $\frac{x}{y} = \frac{v}{1}$

$$xx - zyy = vv - z,$$

welche Differenzen durch die oben (§ 12) Operationen mit dem ersten griechischen Buchstaben negativ genommen, also $-\alpha$, bezeichnet wird. Weiter wird nach Setzen von $\frac{x}{y} = \frac{(v,a)}{(a)} = \frac{va+1}{a}$ erschlossen

$$xx - zyy = (vv - z)aa + 2va + 1 = -\alpha aa + 2va + 1,$$

also

$$xx - zyy = 1 + a(2v - \alpha a) = 1 + a(A - B) = \beta$$

- wegen $v = A$ und $\alpha a = A + B$. Deshalb wird in diesem Fall $xx - zyy = \beta$.

§21 Weil wir also folgendes erlangt haben

$$vv - z = -\alpha \quad \text{und} \quad (v,a)^2 - z(a)^2 = \beta,$$

werden wir von da aus weiter fortschreiten können. Es sei also

$$\frac{x}{y} = \frac{(v,a,b)}{(a,b)} = \frac{b(v,a)+v}{b(a)+1}$$

und unter Verwendung jener Reduktionen werden wir erhalten

$$xx - zyy = \beta bb + 2vb(v,a) - 2zb(a) - \alpha,$$

also wird wegen $(v,a) = v(a) + 1$ sein

$$xx - zyy = \beta bb - 2\alpha ab + 2vb - \alpha = -\alpha - b(2\alpha a - \beta b - 2v);$$

aber es ist $v = A$, $\alpha a = A + B$ und $\beta b = B + C$ und daher

$$xx - zyy = -\alpha - b(B - C) = -\gamma,$$

so dass gilt

$$(v,a,b)^2 - z(a,b)^2 = -\gamma.$$

§22 Wir wollen nun den folgenden Bruch betrachten

$$\frac{x}{y} = \frac{(v,a,b,c)}{(a,b,c)} = \frac{c(v,a,b)+(v,a)}{c(a,b)+a},$$

aus welchem erschlossen wird

$$xx - zyy = -\gamma cc + 2c(v,a,b)(v,a) + \beta - 2zca(a,b),$$

deren mittlerer Teil auf $2c(\beta b - \alpha a + v)$ reduziert wird, woher wegen $v = A$, $\alpha a = A + B$, $\beta b = B + C$, $\gamma c = C + D$ resultiert

$$xx - zyy = \beta + c(C - D) = \delta,$$

so dass gilt

$$(v,a,b,c)^2 - z(a,b,c)^2 = \delta,$$

woher durch Induktion die folgenden Werte leicht erschlossen werden.

§23 Damit ich aber nicht so erscheine, der Induktion zu viel zugeteilt zu haben, kann diese Untersuchung auf die folgende Weise durchgeführt werden. Es sei

$$\begin{aligned}
&(v)^2 &&- z1^2 &&= \mathfrak{A},\\
&(v,a)^2 &&- z(a)^2 &&= \mathfrak{B},\\
&(v,a,b)^2 &&- z(a,b)^2 &&= \mathfrak{C},\\
&(v,a,b,c)^2 &&- z(a,b,c)^2 &&= \mathfrak{D},\\
&(v,a,b,c,d)^2 &&- z(a,b,c,d)^2 &&= \mathfrak{E}
\end{aligned}$$

etc.,

wo wir freilich schon gesehen haben, dass $\mathfrak{A} = -\alpha$, $\mathfrak{B} = \beta$, $\mathfrak{C} = -\gamma$ etc. ist.

Weil aber gilt

$$\begin{aligned}
&(v,a) &&= a(v) &&+1, &&(a) &&= a, \\
&(v,a,b) &&= b(v,a) &&+(v), &&(a,b) &&= b(a) &&+1, \\
&(v,a,b,c) &&= c(v,a,b) &&+(v,a), &&(a,b,c) &&= c(a,b) &&+(a), \\
&(v,a,b,c,d) &&= d(v,a,b,c) &&+(v,a,b), &&(a,b,c,d) &&= d(a,b,c) &&+(a,b)
\end{aligned}$$

etc.

werden wir haben

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= \mathfrak{A}aa + 1 + 2a(v), \\
\mathfrak{C} &= \mathfrak{B}bb + \mathfrak{A} + 2b((v,a)(v) - z(a)), \\
\mathfrak{D} &= \mathfrak{C}cc + \mathfrak{B} + 2c((v,a,b)(v,a) - z(a,b)(a)), \\
\mathfrak{E} &= \mathfrak{D}dd + \mathfrak{C} + 2d((v,a,b,c)(v,a,b) - z(a,b,c)(a,b)), \\
\mathfrak{E} &= \mathfrak{E}ee + \mathfrak{D} + 2e((v,a,b,c,d)(v,a,b,c) - z(a,b,c,d)(a,b,c)),
\end{aligned}$$

etc.

§24 Wir wollen nun der Kürze wegen festlegen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= 1 + \mathfrak{A}ab + 2a \cdot O, \\
\mathfrak{C} &= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}bb + 2b \cdot P, \\
\mathfrak{D} &= \mathfrak{B} + \mathfrak{C}cc + 2c \cdot Q, \\
\mathfrak{E} &= \mathfrak{C} + \mathfrak{D}dd + 2d \cdot R, \\
\mathfrak{F} &= \mathfrak{D} + \mathfrak{E}ee + 2e \cdot S
\end{aligned}$$

etc.

und aus den oberen Reduktionen werden wir erschließen

$$\begin{aligned}
P - O &= a(v)^2 - za = \mathfrak{A}a, \\
Q - P &= b(v,a)^2 - zb(a)^2 = \mathfrak{B}b, \\
R - Q &= c(v,a,b)^2 - cz(a,b)^2 = \mathfrak{C}c, \\
S - R &= d(v,a,b,c)^2 - dz(a,b,c)^2 = \mathfrak{D}d
\end{aligned}$$

etc.

und so wird werden

$$\begin{aligned}
O &= v, \\
P &= v + \mathfrak{A}a, \\
Q &= v + \mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b, \\
R &= v + \mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c, \\
S &= v + \mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c + \mathfrak{D}d
\end{aligned}$$

etc.

§25 Die oben gebrauchten Formeln liefern aber

$$\begin{aligned}
A &= v, \\
B &= -v + \alpha a, \\
C &= v - \alpha a + \beta b, \\
D &= -v + \alpha a - \beta b + \gamma c, \\
E &= v - \alpha a + \beta b - \gamma c + \delta d
\end{aligned}$$

$$\text{etc.},$$

woher es klar zu tage tritt, dass ist

$$O = A \quad \text{und} \quad P = -B \quad \text{wegen} \quad \mathfrak{A} = -\alpha.$$

Weil nun $\mathfrak{B} = 1 - \alpha aa + 2av = 1 + a(A - B)$ ist, wird natürlich sein

$$\mathfrak{B} = \beta \quad \text{und daher} \quad Q = C,$$

woher weiter erschlossen wird

$$\mathfrak{C} = -\alpha + \beta bb - 2bB = -\alpha - b(2B - \beta b) = -\alpha - b(B - C),$$

und so ist

$$\mathfrak{C} = -\gamma \quad \text{und} \quad R = -D;$$

auf die gleiche Weise ist

$$\mathfrak{D} = \beta - \gamma cc + 2cC = \beta + c(2C - \gamma c) = \beta + c(C - D)$$

und daher ist

$$\mathfrak{D} = \delta \quad \text{und} \quad S = E.$$

Dann aber weiter

$$\mathfrak{E} = -\gamma + \delta dd - 2dD = -\gamma - d(2D - \delta d) = -\gamma - d(D - E)$$

und deshalb

$$\mathfrak{E} = -\varepsilon,$$

woher die obere Induktion hinreichend bestätigt wird.

§26 Für die der Wurzel $\sqrt{z}$ näherungsweise gleichen Brüche $\frac{x}{y}$ erlangen wir die folgenden Relationen:

Nimmt	man	wird sein
$x = 1,$	$y = 0,$	$xx = zyy + 1,$
$x = (v),$	$y = 1,$	$xx = zyy - \alpha,$
$x = (v, a),$	$y = (a),$	$xx = zyy + \beta,$
$x = (v, a, b),$	$y = (a, b),$	$xx = zyy - \gamma,$
$x = (v, a, b, c),$	$y = (a, b, c),$	$xx = zyy + \delta,$
$x = (v, a, b, c, d),$	$y = (a, b, c, d),$	$xx = zyy - \varepsilon$

etc.,

woher das PELL'sche Problem gelöst wird, sooft ein bestimmter der zweiten griechischen Buchstaben β, δ, ζ etc. in die Einheit übergeht.

§27 Wir haben aber oben gesehen, dass nur den Indizes, welche an der Zahl $2v$ sind, der in die Einheit übergehende griechische Buchstabe entspricht; weil also jede beliebiger der Perioden, welche wir in der Reihe der Indizes beobachtet haben, mit dem Index $2v$ beginnt, ist es offenbar, wenn wir die Zahlen x und y durch die Indizes der ersten Periode bestimmen, dass entweder gelten wird

$$xx = zyy - 1$$

oder

$$xx = zyy + 1;$$

und das erste passiert freilich, wenn die Anzahl der der die einzelnen Perioden festlegenden Indizes ungerade war, das zweite hingegen, wenn sie gerade war. In diesem Fall hat man also sofort eine Lösung des PELL'schen Problems, in welchem verlangt wird, dass gilt

$$pp = zqq + 1,$$

weil ja $p = x$ und $q = y$ genommen werden muss.

§28 Aber wenn aus der ersten Periode $xx = zyy - 1$ hervorgeht, was passiert, wenn die Anzahl der Indizes ungerade war, dann könnten die Indizes bis hin zum Anfang der dritten Periode, um die Zahlen x und y zu bestimmen, genommen werden; weil deren Anzahl gerade ist, würden auf diese Weise geeignete Zahlen für p und q erhalten werden. Aber nach Finden eines Falles, in welchem $xx = zyy - 1$ wird, können daher um Vieles einfacher Zahlen p und q aufgefunden werden, dass $pp = zqq + 1$ ist. Man nehme nämlich

$$p = 2xx + 1 \quad \text{und} \quad q = 2xy$$

und es wird sein

$$pp - zqq = 4x^4 + 4xx + 1 - 4zxxyy = 1 + 4xx(xx - zyy + 1);$$

aber es ist $xx - zyy + 1 = 0$ und daher

$$pp - zqq = 1 \quad \text{oder} \quad pp = zqq + 1,$$

so wie es das Pell'sche Problem erfordert.

Wir wollen also sehen, auf welche Weise für jede Zahl z aus den daher entstehenden Indizes die Zahlen p und q zu bestimmen sind, dass $pp = zqq + 1$ wird, wo wir freilich die Fälle nach den Perioden durchgehen wollen.

I. Fall, in welchem für die Zahl z die Indizes diese sind: v, $2v$, $2v$ etc.

§29 Hier enthalten die einzelnen Perioden einen einzigen Index; also wird nach Nehmen von

$$x = (v) \quad \text{und} \quad y = 1$$

sein

$$xx = zyy - 1.$$

Deswegen, damit $pp = zqq + 1$ wird, werde genommen

$$p = 2xx + 1 = 2vv + 1 \quad \text{und} \quad q = 2xy = 2v.$$

Dieser Fall, wie wir oben gesehen haben, hat Geltung, wenn gilt

$$z = vv + 1,$$

oder die Zahl z ein Quadrat um eine Einheit übersteigt; dann muss also genommen werden

$$p = 2vv + 1 \quad \text{oder} \quad p = 2z - 1 \quad \text{und} \quad q = 2v,$$

auf welche Weise dem PELL'schen Problem Genüge geleistet wird, dass $p = \sqrt{zqq + 1}$ ist.

Ist		wird sein		und so
$z = 2,$	$p = 3$	und	$q = 2$	$p = \sqrt{2qq + 1},$
$z = 5,$	$p = 9$	und	$q = 4$	$p = \sqrt{5qq + 1},$
$z = 10,$	$p = 19$	und	$q = 6$	$p = \sqrt{10qq + 1},$
$z = 17,$	$p = 33$	und	$q = 8$	$p = \sqrt{17qq + 1}$

etc.

II. FALL, IN WELCHEM FÜR DIE ZAHL z DIE INDIZES DIESE SIND: v, a, $2v$, a, $2v$ ETC.

§30 Die erste Periode besteht aus zwei den Zahlen v, a, woher man nach Nehmen von

$$x = (v, a) = va + 1 \quad \text{und} \quad y = (a) = a$$

haben wird

$$xx = zyy + 1.$$

Damit also für das PELL'sche Problem $pp = zqq + 1$ wird, muss genommen werden

$$p = va + 1 \quad \text{und} \quad q = a.$$

Aus den Indizes tritt es aber klar zu tage, dass dieser Fall Geltung hat, sooft die Zahl diese war

$$z = vv + \frac{2v}{a},$$

woher eingesehen wird, dass dieser Fall in ganzen Zahlen, über welche hier gehandelt wird, nur existieren kann, wenn a ein Teiler von $2v$ ist, wo zwei Fälle zu betrachten sind:

1. Ist $a = 2n$, wird sein $v = mn$ und $\frac{2v}{a} = m$;
2. ist $a = 2n + 1$, wird sein $v = m(2n + 1)$ und $\frac{2v}{a} = 2m$;

III. FALL, IN WELCHEM DIE INDIZES FÜR DIE ZAHL z DIESE SIND: $v, a, a, 2v, a, a, 2v$ ETC.

§31 Nachdem aus der ersten Periode die Zahlen x und y so genommen worden sind, dass gilt

$$x = (v, a, a) \quad \text{und} quad y = (a, a),$$

wird sein

$$xx = zyy - 1;$$

daher, damit $pp = zqq + 1$ wird, muss genommen werden

$$p = 2xx + 1 \quad \text{und} \quad q = 2xy.$$

Hier ist aber

$$y = aa + 1 \quad \text{und} \quad x = vy + a,$$

woher die Zahlen p und q sehr leicht bestimmt werden. Aus den Indizes wird die Zahl z eine Form solcher Art haben

$$z = vv + u,$$

während gilt

$$u = \frac{2av + 1}{aa + 1},$$

woher es klar zu tage tritt, dass die Zahl a gerade sein muss. Wenn also $a = 2n$ gesetzt wird, ist es notwendig, dass ist

$$v = n + m(4nn + 1),$$

und dann wird

$$u = 1 + 4mn.$$

IV. Fall, in welchem die Indizes für die Zahl z diese sind: v, a, b, a, $2v$, a, b, a, $2v$ etc.

§32 Weil die Anzahl der Indizes in jeder Periode gerade ist, wenn genommen wird

$$x = (v, a, b, c) \quad \text{und} \quad y = (a, b, a),$$

wird sein

$$xx = zyy + 1$$

und daher

$$p = x \quad \text{und} \quad q = y.$$

Durch die oben gezeigten Transformationen kann aber die Verdopplung der Indizes auf diese Weise beseitigt werden

$$x = (a)(v, a, b) + (v, a) \quad \text{und} \quad y = (a)(a, b) + (a).$$

Daher, wenn aus den Indizes v, a, b die folgenden Brüche gebildet werden

$$\begin{array}{lllll} \text{Indizes} & v, & a, & b & \\ \text{Brüche} & \dfrac{1}{0}, & \dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}, & \dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}, & \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}, \end{array}$$

wird wegen

$$\mathfrak{A} = (v), \quad \mathfrak{B} = (v, a), \quad \mathfrak{C} = (v, a, b)$$

und

$$\mathfrak{a} = 1, \qquad \mathfrak{b} = (a), \qquad \mathfrak{c} = (a, b)$$

sein

$$x = \mathfrak{b}\mathfrak{C} + \mathfrak{a}\mathfrak{B} \quad \text{und} \quad y = \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Aus den Indizes wird aber

$$z = vv + u,$$

während gilt

$$2v = m(a, b, a) - b(a, b)$$

und auch

$$u = m(a, b) - b(b).$$

V. Fall, in welchem die Indizes für die Zahl z diese sind: $v, a, b, b, a, 2v$ etc.

§33 Wegen der ungeraden Anzahl der Indizes einer jeden Periode, wenn wir nehmen

$$x = (v, a, b, b, a) \quad \text{und} \quad y = (a, b, b, a),$$

wird sein

$$xx = zyy - 1;$$

daher, damit für das PELL'sche Problem $pp = zqq + 1$ wird, muss festgelegt werden

$$p = 2xx + 1 \quad \text{und} \quad q = 2xy.$$

Damit aber die Zahlen x und y leichter gefunden werden können, werden die folgenden Transformationen durchgeführt

$$x = (a, b)(v, a, b) + (a)(v, a) \quad \text{und} \quad y = (a, b)(a, b) + (a)(a),$$

welche also durch die Indizes v, a, b allein, indem daraus die Brüche gebildet werden, bestimmt werden werden:

$$\begin{array}{lcccc} \text{Indizes} & v, & a, & b & \\ \text{Brüche} & \frac{1}{0}, & \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}, & \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}, & \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}, \end{array}$$

wobei ist

$$\mathfrak{A} = v, \quad \mathfrak{B} = a\mathfrak{A} + 1, \quad \mathfrak{C} = b\mathfrak{B} + \mathfrak{A}$$

und

$$\mathfrak{a} = 1, \quad \mathfrak{b} = a\mathfrak{a} + 0, \quad \mathfrak{c} = b\mathfrak{b} + \mathfrak{a};$$

dann muss nämlich genommen werden

$$x = \mathfrak{c}\mathfrak{C} + \mathfrak{b}\mathfrak{B} \quad \text{und} \quad y = \mathfrak{c}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{b}.$$

Dieser Fall hat aber Geltung, sooft nach Setzen von

$$z = vv + u$$

war

$$2v = m(a, b, b, a) + (b, b)(a, b, b)$$

und

$$u = m(a, b, b) + (b, b)(b, b).$$

VI. Fall, in welchem die Indizes für die Zahl z diese sind: $v, a, b, c, b, a, 2v$ etc.

§34 Weil ja hier die Anzahl der Indizes in jeder beliebigen Periode gerade ist, wird, wenn wir nehmen

$$x = (v, a, b, c, b, a) \quad \text{und} \quad y = (a, b, c, b, a),$$

sein

$$xx = zyy + 1$$

und daher hat man für das PELL'sche Problem sofort

$$p = x \quad \text{und} \quad q = y.$$

Aber die Zahlen x und y werden leichter unter Verwendung dieser Transformationen gefunden werden

$$x = (a, b)(v, a, b, c) + (a)(v, a, b) \quad \text{und} \quad y = (a, b)(a, b, c) + (a)(a, b);$$

daher, wenn aus den Indizes v, a, b, c auf die dargestellte Weise die Brüche gebildet werden

$$\begin{array}{llllll} \text{Indizes} & v, & a, & b, & c & \\ \text{Brüche} & \frac{1}{0}, & \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}, & \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}, & \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}, & \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{d}}, \end{array}$$

muss genommen werden

$$x = \mathfrak{c}\mathfrak{D} + \mathfrak{b}\mathfrak{C} \quad \text{und} \quad y = \mathfrak{c}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Aber dieser Fall hat Geltung, sooft nach Setzen von

$$z = vv + u$$

war

$$2v = m(a,b,c,d,a) - (b,c,b)(a,b,c,b)$$

und

$$u = m(a,b,c,d) - (b,c,b)(b,c,b)$$

VII. Fall, in welchem die Indizes für die Zahl z diese sind: v, a, b, c, c, b, a, $2v$ etc.

§35 Hier ist wiederum die Anzahl in jeder beliebigen Periode ungerade; und daher, wenn wir setzen

$$x = (v,a,b,c,c,b,a) \quad \text{und} \quad y = (a,b,c,c,b,a),$$

wird sein

$$xx = zyy - 1;$$

daher, damit $pp = zqq + 1$ wird, muss genommen werden

$$p = 2xx + 1 \quad \text{und} \quad q = 2xy.$$

Für das leichtere Finden der Zahlen x und y werden aus den Indizes v, a, b, c

Brüche gebildet

$$\begin{array}{llllll} \text{Indizes} & v, & a, & b, & c & \\ \text{Brüche} & \frac{1}{0}, & \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}, & \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}, & \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}, & \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{d}}, \end{array}$$

und daher wird sein

$$x = \mathfrak{b}\mathfrak{D} + \mathfrak{c}\mathfrak{C} \quad \text{und} \quad y = \mathfrak{b}\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{c}.$$

Aber dieser Fall wird Geltung haben, sooft nach Setzen von

$$z = vv + u$$

war

$$2v = m(a, b, c, c, b, a) + (b, c, c, d)(a, b, c, c, b)$$

und

$$u = m(a, b, c, c, b) + (b, c, c, b)(b, c, c, b).$$

VIII. Fall, in welchem die Indizes für die Zahl z diese sind: $v, a, b, c, d, c, b, a, 2v$ etc.

§36 Hier enthält jede beliebige Periode acht Indizes; und daher, wenn wir festlegen

$$x = (v, a, b, c, d, c, b, a) \quad \text{und} \quad y = (a, b, c, d, c, b, a),$$

wird sein

$$xx = zyy + 1$$

und für das PELL'sche Problem muss genommen werden

$$p = x \quad \text{und} \quad q = y,$$

dass $pp = zqq + 1$ wird. Aber unter Verwendung der Transformationen ist es möglich, die Zahlen x und y allein durch die Indizes v, a, b, c, d etc. zu bestimmen. Nachdem nämlich daher die Brüche gebildet worden sind

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Indizes} & v, & a, & b, & c, & d & \\ \text{Brüche} & \frac{1}{0}, & \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}, & \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}, & \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}, & \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{d}}, & \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{e}}, \end{array}$$

wird werden

$$x = \mathfrak{b}\mathfrak{E} + \mathfrak{c}\mathfrak{D} \quad \text{und} \quad y = \mathfrak{d}\mathfrak{e} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}.$$

Dieser Fall hat aber Geltung, sooft nach Setzen von

$$z = vv + u$$

war

$$2v = m(a,b,c,d,c,b,a) - (b,c,d,c,b)(a,b,c,d,c,b)$$

und

$$u = m(a,b,c,d,c,b) - (b,c,d,c,b)(b,c,d,c,b).$$

Darstellung der Rechnung für jede beliebige Zahl z, dass $pp = zqq + 1$ wird

§37 Zuerst müssen also mit der oben dargestellten Methode für die Zahl z aus ihrer Quadratwurzel die Indizes ausfindig gemacht werden; diese Operation muss nur soweit fortgesetzt werden, bis schließlich die Indizes in umgekehrter Reihenfolge hervorzugehen beginnen, auf welche Weise wir uns die Hälfte der oben erklärten Arbeit ersparen können werden. Weil aber in der ersten Periode entweder ein mittlerer oder zwei mittlere Terme auftauchen, sind diese Fälle sorgsam zu unterscheiden, weil, wenn ein mittlerer Term vorhanden war, das Finden der Zahlen p und q auf die in den Fällen II, IV, VI und VIII angegebene Weise in Angriff genommen werden muss, wenn es aber zwei Mittelterme gab, auf die Weise, die in den Fällen I, III, V und VII beschrieben worden ist. Wenn natürlich ersteres passiert, werden die Zahlen p und q den Zahlen x und y gleich angenommen werden, wenn aber letzteres eintritt, wie wir gesehen haben, muss $p = 2xx + 1$ und $q = 2xy$ gesetzt werden, so dass in diesen Fällen die Zahlen p und q um Vieles größer als die übrigen geraden aufgefunden werden.

§38 Betrachte also diese Beispiele des ersten Geschlechts, in welchem in jeder beliebigen Periode ein einziger mittlerer Index gegeben ist.

I. Wenn $z = 6$ ist, sind die Indizes 2, 2, 4; daher ist die Operation:

$$\begin{array}{cccc} 2, & 2, & & \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}; & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x = 1 \cdot 5 + 0 \cdot 2, & & p = 5, \\ & \text{also} & \\ y = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1, & & q = 2. \end{array}$$

II. Wenn $z = 14$ ist, sind die Indizes 3, 1, 2, 1, 6:

$$\begin{array}{cccc} 3, & 1, & 2 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{11}{3}; \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x = 1 \cdot 11 + 1 \cdot 4, & & p = 15, \\ & \text{also} & \\ y = 1 \cdot 3 \;\; + 1 \cdot 1, & & q = 4. \end{array}$$

III. Wenn $z = 19$ ist, sind die Indizes 4, 2, 1, 3, 1, 2, 8:

$$\begin{array}{ccccc} 4, & 2, & 1, & 3 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{4}{1}, & \frac{9}{2}, & \frac{13}{3}, & \frac{48}{11}; \end{array}$$

$$x = 3 \cdot 48 + 2 \cdot 13, \qquad p = 170,$$

also

$$y = 3 \cdot 11 + 2 \cdot 3, \qquad q = 39.$$

IV. Wenn $z = 31$ ist, sind die Indizes 5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10:

$$\begin{array}{cccccc} 5, & 1, & 1, & 3, & 5 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{5}{1}, & \frac{6}{1}, & \frac{11}{2}, & \frac{39}{7}, & \frac{206}{37}; \end{array}$$

daher

$$x = 7 \cdot 206 + 2 \cdot 39, \qquad p = 1520,$$

also

$$y = 7 \cdot 37 \quad + 2 \cdot 7, \qquad q = 273.$$

V. Wenn $z = 44$ ist, sind die Indizes 6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12:

$$\begin{array}{cccccc} 6, & 1, & 1, & 1, & 2 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{6}{1}, & \frac{7}{1}, & \frac{13}{2}, & \frac{20}{3}, & \frac{53}{8}; \end{array}$$

daher

$$x = 3 \cdot 53 + 2 \cdot 20, \qquad p = 199,$$

also

$$y = 3 \cdot 8 \quad + 2 \cdot 3, \qquad q = 30.$$

VI. Wenn $z = 55$ ist, sind die Indizes 7, 2, 2, 2, 2, 14:

$$
\begin{array}{cccc}
7, & 2, & 2 & \\
\frac{1}{0}, & \frac{7}{1}, & \frac{15}{2}, & \frac{37}{5};
\end{array}
$$

daher

$$
\begin{array}{ll}
x = 2 \cdot 37 + 1 \cdot 15, & p = 89, \\
& \text{also} \\
y = 2 \cdot 5 \ \ + 1 \cdot 2, & q = 12.
\end{array}
$$

§39 Vom anderen Geschlecht, in welchem zwei Mittelterme in jeder beliebigen Periode gegeben sind, füge ich hingegen diese Beispiele hinzu.

I. Wenn $z = 13$ ist, sind die Indizes 3, 1, 1, 1, 1, 6:

$$
\begin{array}{cccc}
3, & 1, & 1 & \\
\frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{7}{2};
\end{array}
$$

daher

$$
\begin{aligned}
x &= 2 \cdot 7 + 1 \cdot 4 = 18, \\
y &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 5.
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
p &= 2xx + 1 = 649, \\
q &= 2xy \qquad = 180.
\end{aligned}
$$

II. Wenn $z = 29$ ist, sind die Indizes 5, 2, 1, 1, 2, 10:

$$\begin{array}{cccc} 5, & 2, & 1 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{5}{1}, & \frac{11}{2}, & \frac{16}{3}; \end{array}$$

daher

$$\begin{aligned} x &= 3 \cdot 16 + 2 \cdot 11 = 70, \\ y &= 3 \cdot 3 \ \ + 2 \cdot 2 \ \ = 13. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} p &= 2xx + 1 = 9801, \\ q &= 2xy \qquad = 1820. \end{aligned}$$

III. Wenn $z = 58$ ist, sind die Indizes 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 14:

$$\begin{array}{ccccc} 7, & 1, & 1, & 1 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{7}{1}, & \frac{8}{1}, & \frac{15}{2}, & \frac{23}{3}; \end{array}$$

daher

$$\begin{aligned} x &= 3 \cdot 23 + 2 \cdot 15 = 99, \\ y &= 3 \cdot 3 \ \ + 2 \cdot 2 \ \ = 13. \end{aligned}$$

Also

$$p = 2xx + 1 = 19603,$$
$$q = 2xy \qquad = 2574.$$

IV. Wenn $z = 61$ ist, sind die Indizes 7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14:

$$\begin{array}{ccccccc} 7, & 1, & 4, & 3, & 1, & 2 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{7}{1}, & \frac{8}{1}, & \frac{39}{5}, & \frac{125}{16}, & \frac{164}{21}, & \frac{453}{58}; \end{array}$$

daher

$$x = 58 \cdot 453 + 21 \cdot 164 = 29718,$$
$$y = 58 \cdot 58 \ \ + 21 \cdot 21 \ \ = 3805.$$

Also

$$p = 2xx + 1 = 1766319049,$$
$$q = 2xy \qquad = 226153980.$$

§40 Wenn daher für größere Zahlen z als die, die zuvor entwickelt worden sind, die Zahlen p und q gesucht werden müssen, dass $pp = zqq + 1$ ist, müssen mit der zuerst dargestellten Methode (§ 12) die Indizes v, a, b, c, d etc. gesucht werden, welche nicht weiter fortgesetzt werden müssen, bis schließlich zum mittleren oder den zwei mittleren der ersten Periode gelangt wird; dann werden aber aus diesen durch die hier beschriebenen Operationen zuerst die Zahlen x und y, dann aber die gesuchten p und q bestimmt werden. Es wird also passend sein, dies an einigen Beispielen zu illustrieren.

I. Es werden Zahlen p und q gesucht, dass $pp = 157qq + 1$ ist

§41 Weil hier $z = 157$ ist, wird $v = 12$ und $\alpha = 13$ sein, woher sich das Finden der Indizes so verhalten wird:

$$\begin{array}{llll}
A = 12, & \alpha = 13, & a = 1, & \\
B = 1, & \beta = 12, & b = 1, & \\
C = 11, & \gamma = 3, & c = 7, & \\
D = 10, & \delta = 19, & b = 1, & \\
E = 9, & \varepsilon = 4, & e = 5, & \\
F = 11, & \zeta = 9, & f = 2, & \\
G = 7, & \eta = 12, & g = 1, & \\
H = 5, & \theta = 11, & h = 1 & \text{der erste mittlere,} \\
I = 6, & \iota = 11, & i = 1 & \text{der zweite mittlere.}
\end{array}$$

Daher bezieht das Beispiel wegen der zwei mittleren Terme auf das zweite Geschlecht und die Operationen sind so durchzuführen:

$$\begin{array}{cccccccccc}
12, & 1, & 1, & 7, & 1, & 5, & 2, & 1, & 1 & \\
\frac{1}{0}, & \frac{12}{1}, & \frac{13}{1}, & \frac{25}{2}, & \frac{188}{15}, & \frac{213}{17}, & \frac{1253}{100}, & \frac{2719}{217}, & \frac{3972}{317}, & \frac{6691}{534}.
\end{array}$$

Daher wird sein

$$x = 534 \cdot 6691 + 317 \cdot 3972 = 4832118$$

und

$$y = 534 \cdot 534 \ \ + 317 \cdot 317 \ \ = 385645.$$

Deshalb ist

$$p = 2xx + 1 = 46698728731849$$

und

$$q = 2xy \qquad = 3726964292220$$

und daher sind dies die kleinsten Zahlen, die der Formel $p = \sqrt{157qq + 1}$ Genüge leisten.

II. Es werden Zahlen p und q gesucht, dass $pp = 367qq + 1$ ist

§42 Hier ist also $z = 367$, $v = 19$ und daher

$$\begin{array}{lll}
A = 19, & \alpha = 6, & a = 6, \\
B = 17, & \beta = 13, & a = 2, \\
C = 9, & \gamma = 22, & c = 1, \\
D = 13, & \delta = 9, & d = 3, \\
E = 14, & \varepsilon = 19, & e = 1, \\
F = 5, & \zeta = 18, & f = 1, \\
G = 13, & \eta = 11, & g = 2, \\
H = 9, & \theta = 26, & h = 1, \\
I = 17, & \iota = 3, & i = 12, \\
K = 19, & \varkappa = 2, & k = 19 \quad \text{der mittlere,} \\
L = 19, & \lambda = 3, & l = 12.
\end{array}$$

Dieses Beispiel bezieht sich also auf das erste Geschlecht.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 19, & 6, & 2, & 1, & 3, & 1, & 1, & 2, & 1, & 12, & 19 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{19}{1}, & \frac{115}{6}, & \frac{249}{13}, & \frac{364}{19}, & \frac{1341}{70}, & \frac{1705}{89}, & \frac{3046}{159}, & \frac{7797}{407}, & \frac{10843}{566}, & \frac{137913}{7199}, & \frac{2631190}{137347}. \end{array}$$

Daher wird sein

$$x = 7199 \cdot 2631190 + 566 \cdot 137913$$

und

$$y = 7199 \cdot 137347 \quad + 566 \cdot 7199,$$

woher die kleinsten Genüge leistenden Zahlen sind

$$\begin{aligned} p &= 19019995568, \\ q &= 992835687. \end{aligned}$$

Tabelle der Zahlen p und q,

mit denen $pp = lqq + 1$ wird - für alle Werte der Zahl l bis hin zu 100

l	q	p	l	p	q
2	2	3	26	10	51
3	1	2	27	5	26
–	–	–	28	24	127
5	4	9	29	1820	9801
6	2	5	30	2	11
7	3	8	31	273	1520
8	1	3	32	3	17
–	–	–	33	4	23
10	6	19	34	6	35
11	3	10	35	1	6
12	2	7	–	–	–
13	180	649	37	12	73
14	4	15	38	6	37
15	1	4	39	4	25
–	–	–	40	3	19
17	8	33	41	320	2049
18	4	17	42	2	13
19	39	170	43	531	3482
20	2	9	44	30	199
21	12	55	45	24	161
22	42	197	46	3588	24335
23	5	24	47	7	48
24	1	5	48	1	7

l	q	p	l	p	q
50	14	99	75	3	26
51	7	50	76	6630	57799
52	90	649	77	40	351
53	9100	66249	78	6	53
54	66	485	79	9	80
55	12	89	80	1	9
56	2	15	—	—	—
57	20	151	82	18	163
58	2574	19603	83	9	82
59	69	530	84	6	55
60	4	31	85	30996	285769
61	226153980	1766319049	86	1122	10405
62	8	63	87	3	28
63	1	8	88	21	197
—	—	—	89	53000	500001
65	16	129	90	2	19
66	8	65	91	165	1574
67	5967	48842	92	120	1151
68	4	33	93	1260	12151
69	936	7775	94	221064	2143295
70	30	251	95	4	39
71	413	3480	96	5	49

72	2	17	97	6377352	62809633
73	267000	2281249	98	10	99
74	430	3699	99	1	10

Zuletzt möchte ich gewisse Beispiele größerer für l angenommener Zahlen hinzufügen:

$$\text{Ist} \quad l = 103, \quad \text{wird sein} \quad \begin{aligned} p &= 227528, \\ q &= 22419; \end{aligned}$$

$$\text{Ist} \quad l = 109, \quad \text{wird sein} \quad \begin{aligned} p &= 158070671986249, \\ q &= 15140424455100; \end{aligned}$$

$$\text{Ist} \quad l = 113, \quad \text{wird sein} \quad \begin{aligned} p &= 1204353, \\ q &= 113296; \end{aligned}$$

$$\text{Ist} \quad l = 157, \quad \text{wird sein} \quad \begin{aligned} p &= 46698728731849, \\ q &= 3726964292220; \end{aligned}$$

$$\text{Ist} \quad l = 367, \quad \text{wird sein} \quad \begin{aligned} p &= 19019995568, \\ q &= 992835687. \end{aligned}$$